

# ASUPRA ENUNȚULUI ȘI REZOLVĂRII UNEI PROBLEME DE MECANICĂ

**Autori: Daniel STAICU <sup>1</sup>, Vasile STAICU <sup>1</sup>**

[staicuvdaniel@yahoo.com](mailto:staicuvdaniel@yahoo.com)

**Coordonatori: Conf.univ.dr. ing Răzvan Bogdan ITU <sup>2</sup>, Asist.univ.dr.ing. Bogdan MARC <sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul IV

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E

## Rezumat

În lucrare este prezentată analiza cu privire la indicațiile și răspunsul date de autori la o problemă de cinematică din mecanică.

## Cuvinte cheie

Ecuatie algebrică, mecanică, probleme

### 1. Introducere

Problema luată în analiză a fost selectată din “ Probleme de mecanică fizică și acustică Ediția a II-a” apărută în Editura didactică și pedagogică, București, 1981, avându-i ca autori pe C. Plăvuțiu, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, C. Stănescu, L. Ionescu, R. Moldovan.

Analiza a fost făcută asupra enunțului și a modului de rezolvare ținând cont de datele problemei puse la dispoziție.

### 2. Enunțul, informațiile, datele, necunoscutele și cerutele unei probleme

Un enunț este o afirmație sau o propoziție care transmite o informație sau o idee, de la conversații informale până la comunicarea profesională.

În rezolvarea unei probleme un rol deosebit de important îl are enunțul. De formularea lui depinde înțelegerea conținutului și chiar modul și rapiditatea rezolvării problemei.

Prezentarea corectă a datelor necesare calculului, a ordinii de determinare a necunoscutelor, executarea corectă a schemei (în cazul în care aceasta este necesară și poate fi realizată numai cu ajutorul datelor din enunț), folosirea unităților de măsură admise, constituie factori foarte importanți care ajută la înțelegerea cu ușurință a conținutului.

Analizând enunțul problemei, în primul rând, trebuie să identificăm fenomenul sau fenomenele mecanice la care se referă problema pusă.

Deci, formularea clară, concisă, completă și exactă care conține toate informațiile necesare rezolvării, datele și necunoscutele ce urmează să fie determinate constituie enunțul unei probleme.

Rezolvarea problemelor este legată de căutarea, folosirea și prelucrarea informațiilor. Ca și conținut, totalitatea indicațiilor necesare pentru rezolvare constituie informațiile problemei. După modul lor de prezentare informațiile cuprinse în enunț pot fi: directe, indirede, ascunse și complexe.

Mărimile despre care enunțul problemei ne informează că au valori cunoscute (sau se cunoaște acest lucru) alcătuiesc *datele* problemei.

Mărimile ce apar pe parcursul calculelor și despre care enunțul nu ne informează că au valori cunoscute constituie *necunoscutele* problemei respective.

Mărimile ale căror valori sunt cerute într-o problemă constituie *cerutele* problemei; ele sunt în număr mai mic sau cel mult egal cu necunoscutele problemei, figurând evident printre acestea din urmă.

La fel ca și în cazul datelor, ce fac parte de altfel din informațiile unei probleme, necunoscutele se pot prezenta într-o mare varietate. O parte din necunoscute pot fi cerute, altele pot să nu fie cerute în enunț, în schimb necesare pentru determinarea celor cerute.

În general, la rezolvarea unei probleme în care prin enunț, nu se cere decât determinarea anumitor mărimi (cerute), atenția se va îndrepta către acestea, eliminând pe parcursul rezolvării sistemului de ecuații ce conține toate necunoscutele problemei pe cele care nu sunt cerute în problema respectivă.

### 3. Prezentarea problemei propuse pentru analiză

Problema este cuprinsă în capitolul 1, Cinematica punctului material, subcapitolul 1.1. Mișcarea uniformă, cu numărul 1.1.5.

În cele ce urmează prezentăm enunțul problemei propuse spre analiză.

Dintr-un punct  $O$  pleacă un mobil cu viteza  $v_1 > 0$ . După un timp  $t$ , la distanța  $s_0$  față de punctul  $O$  pleacă un alt mobil cu viteza  $v_2 > v_1$ . Să se determine după cât timp  $\tau$  și la ce distanță se vor întâlni cele două mobile. Să se reprezinte grafic spațiile parcurse de mobile în funcție de timp.

În continuare prezentăm conform autorilor indicațiile și răspunsul la problemă.

(1.1.5. – din carte). Spațiul parcurs de mobilul cu viteza  $v_1$  este  $s_1=v_1t_1$ , iar spațiul parcurs de mobilul cu viteza  $v_2$  este  $s_2=v_2t_2$ . Din grafic (fig. 1 (fig. 1.1.5R – din carte) se vede că  $s_1=s_2+s_0$ , iar  $t_1=t_2+\tau$ . Rezultă în final că:

$$t = \frac{v_2\tau - s_0}{v_2 - v_1}, \quad s = v_1 \frac{v_2\tau - s_0}{v_2 - v_1}, \quad (1)$$

#### 4. Analiza problemei

Din enunțul problemei timpul după care pleacă cel de-al doilea mobil viteza  $v_2$  este  $t$  nu  $\tau$  notat ca în graficul din figura 1.

De asemenea la cererea ca să se determine după cât timp  $\tau$  se vor întâlni cele două mobile nu se specifică momentul inițial (de la plecarea primului mobil sau de la plecarea celui de-al doilea).

În continuare ținând cont de enunțul problemei și de graficul din figura 1,  $t_1=t$  nu poate fi timpul după care se vor întâlni cele două mobile. Conform enunțului și luând în considerare și graficul din figură timpul de întâlnire considerat de la plecarea primului mobil trebuie să fie  $\tau$ , deci  $t_1=\tau$  și  $\tau=t+t_2$  sau  $t_2=\tau-t$ .

Asfel luând în considerare cele menționate mai sus vom avea pentru cele două mobile aflate în mișcare uniformă relațiile:

- pentru primul mobil:

$$s_1 = v_1 t_1 = v_1 \tau, \quad (3)$$

- pentru al doilea mobil:

$$s_2 = v_2 t_2 = v_2 (\tau - t), \quad (3)$$

și relația dintre spații:

$$s_1 = s_2 + s_0, \quad (4)$$

Din (2), (3) și (4) rezultă:

$$v_1 \tau = s_0 + v_2 (\tau - t), \quad (5)$$

de unde:

$$v_1 \tau = s_0 + v_2 \tau - v_2 t \Rightarrow \tau = \frac{v_2 t - s_0}{v_2 - v_1}, \quad (6)$$

Distanța la care se vor întâlni mobilele este:

$$d = s_1 = v_1 t_1 = v_1 \tau = v_1 \frac{v_2 t - s_0}{v_2 - v_1}, \quad (7)$$

Dacă am considera pe  $\tau$  ca timp de întâlnire de la plecarea celui de al doilea mobil am avea relații

- pentru primul mobil:

$$s_1 = v_1 t_1 = v_1 (t + \tau), \quad (8)$$

- pentru al doilea mobil:

$$s_2 = v_2 t_2 = v_2 \tau, \quad (9)$$

de unde:

$$v_1 (t + \tau) = s_0 + v_2 \tau \Rightarrow \tau = \frac{v_1 t - s_0}{v_2 - v_1}, \quad (10)$$

Dar  $v_1 t = s_0$  și atunci conform (10)  $\tau$  ar fi egal cu zero ( $s_0 - s_0 = 0$ ) ceea ce este imposibil, adică  $s_2$  ar fi de asemenea egal cu zero.

#### Concluzii

În exemplul analizat am arătat de ce sunt importante formularea clară, concisă, completă și exactă care conține toate informațiile necesare rezolvării problemei, rezolvarea problemei fiind legată de căutarea, folosirea și prelucrarea informațiilor (totalitatea indicațiilor necesare pentru rezolvare). La baza rezolvării unei probleme stau informațiile cuprinse în enunț.

De asemenea, de o deosebită importanță este verificarea și interpretarea rezultatelor obținute.

#### Bibliografie

<https://lectii-virtuale.ro/teorie/rotatia-solidului-rigid-momentul-fortei-cuplul-de-forte->

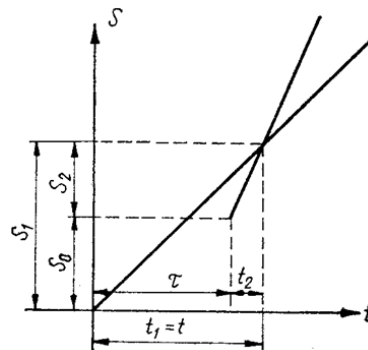


Fig. 1. Figura 1.1.5R din carte



# CERCETĂRI PRIVIND POSIBILITĂȚILE DE MODERNIZARE A MOLETELOR TURNULUI DE EXTRAȚIE DE LA SALINA SLĂNIC PRAHOVA

**Autori:** Florin BURDEA <sup>1</sup>, Vlad CURCĂ <sup>2</sup>  
[burdeafflorin@gmail.com](mailto:burdeafflorin@gmail.com), [vladcurca1@gmail.com](mailto:vladcurca1@gmail.com)

**Coordonator:** Asist.univ.dr.ing. Daniel Cosmin VITAN <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, I.M.E, specializarea: Mașini și utilaje, anul I;

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, I.M.E, specializarea: Mașini și utilaje, anul I;

<sup>3</sup> Universitatea din Petroșani, I.M.E, Departamentul: I.M.I.T.

## Rezumat

Lucrarea abordează o serie de cercetări care vizează identificarea unei soluții pentru modernizarea moletelor turnului de extracție din salina de la Slănic Prahova.

Având acest obiectiv în vedere și pornind de la constatarea că soluția anterioară este uzată, a fost concepută și proiectată o nouă variantă, care să poată fi aplicată pe structura existentă a turnului de extracție fără modificări semnificative. Pentru analiza și proiectarea asistată au fost utilizate programe software specializate, capabile să ofere o interpretare corectă a rezultatelor, premegător fabricării acestora.

Mașinile miniere sunt sisteme industriale de mare complexitate și importanță în procesul de extragere a substanțelor minerale utile. Această categorie de instalații constituie un factor esențial în funcționarea exploatărilor miniere, iar procesele de modernizare, necesare pentru menținerea și exploatarea performanțelor tehnice și economice, reprezintă singura opțiune viabilă pentru continuarea activităților de extracție. Din această perspectivă, menținerea caracteristicilor de producție la un nivel ridicat, respectând în același timp cerințele de siguranță și costuri minime de fabricație, transformă întreținerea într-o prioritate.

Lucrarea, de asemenea originală, propune o metodologie de lucru și de abordare aplicabilă în general și în alte situații similare.

## Cuvinte cheie

*Moletă, axe moletă, rulmenți, modelare 3D, analiză 3D.*

### 1. Introducere [1], [7],

Moletele de deviere sunt utilizate în cazul în care instalația este echipată cu un dispozitiv de înfășurare a cablului, amplasat la sol, în timp ce acestea sunt situate pe turnului de extracție.

Moletele de deviere au rolul de a apropia ramurile cablului între ele și de a crește unghiul de înfășurare al cablului, într-un interval cuprins între 45° și 90°, în funcție de cerințele specifice.

Formele constructive ale moletelor diferă în funcție de profilul utilizat pentru realizarea spițelor. Moletele de deviere și arborele acestora se deplasează, prin intermediul rulmenților de alunecare sau a celor cu role, pe structura turnului de extracție.

Instalațiile de extracție din industria minieră sunt sisteme industriale de o complexitate și importanță ridicată, utilizate în procesul tehnologic de extragere a substanțelor minerale utile. Această categorie de echipamente constituie un factor esențial în funcționarea unităților miniere. Procesele de modernizare, menite să asigure continuitatea exploatării și să crească performanțele tehnice și economice, reprezintă în prezent singura alternativă viabilă pentru desfășurarea în continuare a proceselor de extracție. Menținerea funcționalității acestora, cu respectarea normelor de siguranță și a costurilor economice minime, constituie o prioritate.

În acest context, pornind de la constatarea că motorul de extracție din salina Slănic Prahova prezintă probleme serioase de degradare a moletelor de deviere amplasate în turnul de extracție, am procedat la proiectarea și conceperea unei alternative moderne, care să poată fi implementată fără a necesita modificări ale structurii constructive a turnului sau ale instalației de extracție.

### 2. Soluție constructivă și funcțională pentru moletele cu diametrul de 2.500 mm [1], [7],

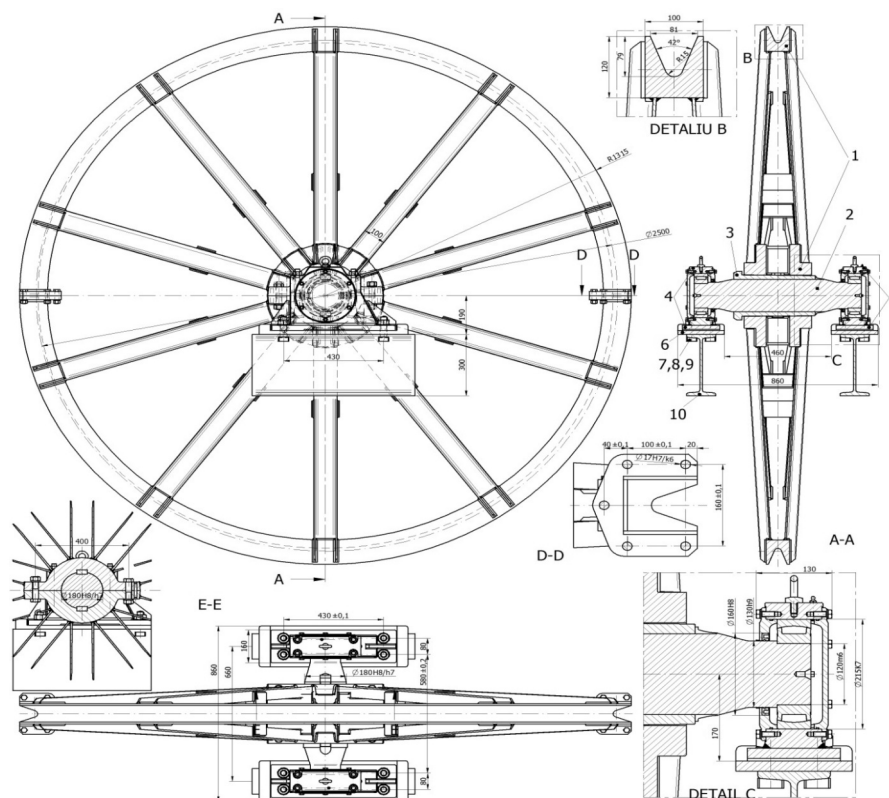
Moleta modernizată, cu diametrul de 2.500 mm, este alcătuită din două semi-molete, asamblate între ele prin știfturi de centrare și șuruburi.

Semi-moleta este realizat din tablă deformabilă prin curbare, iar canalul moletei este confecționat din oțel, într-o construcție metalică sudată, iar spițele sunt realizate din profil laminat tip U10, asamblate prin sudură.

Acest tip de moletă, fabricată prin sudare, prezintă un comportament bun în exploatare, datorită simplității construcției și fabricației, precum și o masă și un moment de inerție reduse.

Pe baza documentației de fabricație a roții tăietoare vechi, cu diametrul de 2.500 mm, utilizată la puțul minei Unirea – Slănic, precum și a tehnologiilor actuale de fabricare a moletelor, a fost elaborată documentația de cercetare în vederea modernizării acestei moletelor vechi și deteriorate.

Soluția constructivă a moletelor de 2.500 mm este prezentată în Fig.1.



**Fig. 1. Figura 1. Soluția constructivă pentru noua moletă de 2.500 mm**

unde: 1 – moletă nouă de 2.500 mm; 2 – arbore; 3 – pană înclinată 45x22x350; 4 – lagăr stânga; 5 – lagăr dreapta; 6 – placă de reazem pentru lagăr; 7 – șurub special cu cap pătrat M27x100; 8 – guler plat M27; 9 – piuliță șurub M27; 10 – grindă în profil I30.

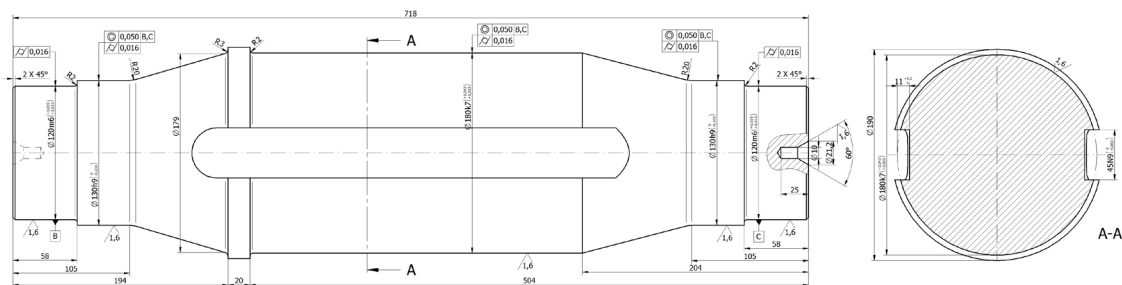
În cazul acestei moletă, care prezintă un raport între lățime și diametru mai mic de 1/10 ( $195 / 2.630 = 0,074$ ), este necesară doar echilibrarea statică.

Moletă montată pe arbore sprijină fusurile arborelui pe două prisme dispuse orizontal și se rotește din 60 în 60 de grade.

Dacă, după rotire, moletă revine constant în aceeași poziție, aceasta este dezechilibrată, centrul de greutate aflându-se sub axa de rotație în acea poziție. Pentru echilibrarea sa, este necesară adăugarea unei mase în partea superioară a inelului mantalei sau îndepărtarea de material (prin frezare sau tăiere) în partea inferioară a acestuia.

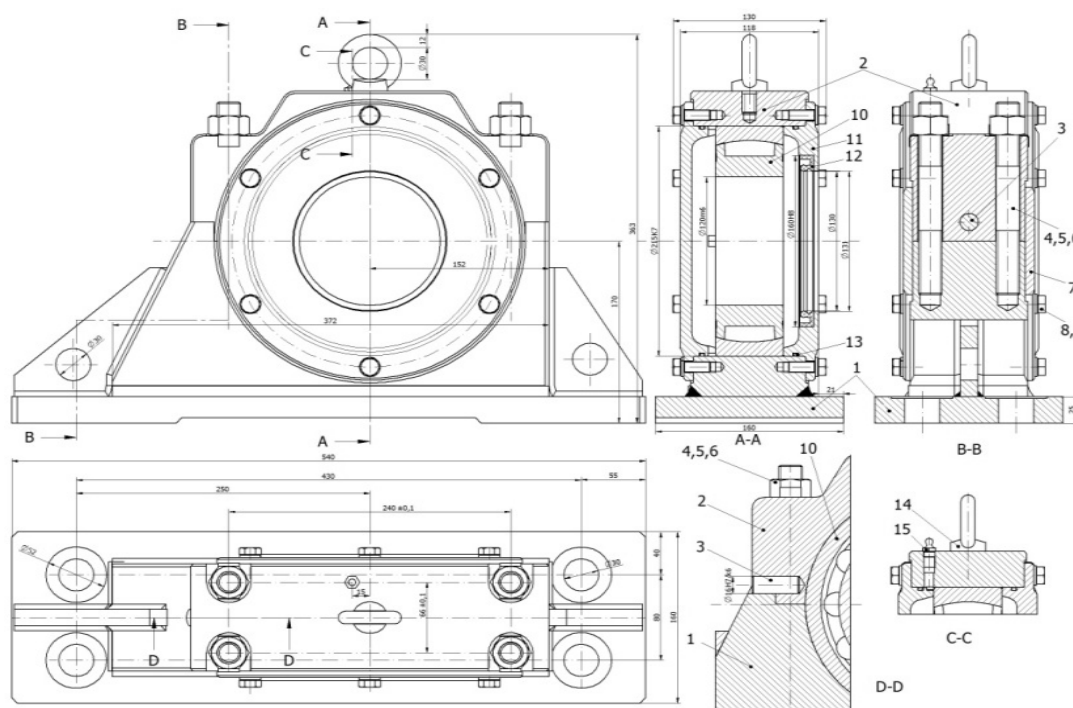
Aceste operațiuni se repetă progresiv, până când, în fiecare poziție de rotație, moletă nu-și mai modifică poziția sub influența centrului de greutate, ceea ce înseamnă că centrul de greutate se află pe axa de rotație. [5]

Figura 2 prezintă soluția constructivă a arborelui noii moletă, realizat din oțel OLC 45 și tratat termic pentru îmbunătățirea proprietăților (călire + revenire la temperatură înaltă), până la o duritate de 30 ... 35 HRC. [3]



**Fig. 2. Soluția constructivă a arborelui moletăi noi 2.500 mm**

În fig. 3. Este prezentată soluția constructivă a lagărului cu rulmenți, unde: 1 – suport inferior pentru lagăr; 2 – suport superior pentru lagăr; 3 – știft cilindric B16x40; 4 – știft de îmbinare M20x180; 5 – guler de blocare M20; 6 – piuliță M20; 7 – capac complet; 8 – șurub M10x25; 9 – guler Grower A10; 10 – lagăr radial-oscilant cu bile, compus din doi rulmenți radiali cu role sferice tip 22224; 11 – capac de trecere; 12 – manșetă B130x160x12 din cauciuc NBR 70Sh; 13 – inel O-ring 207x3.5 din cauciuc NBR 70Sh; 14 – inel de ridicare M12; 15 – dispozitiv de ungere UA3.



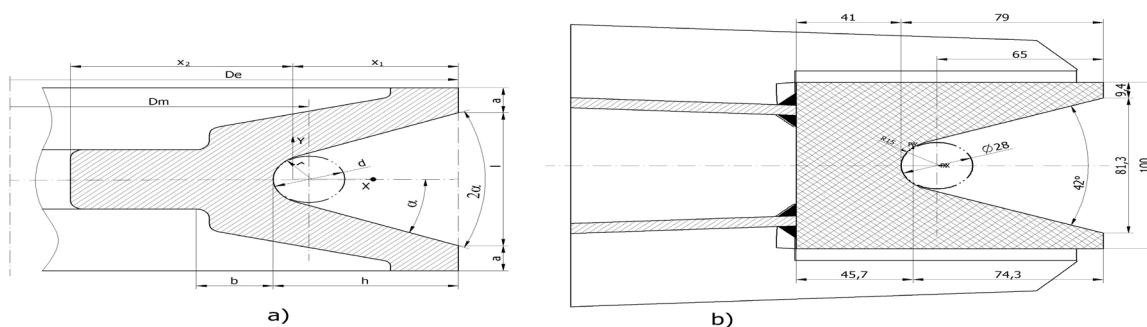
**Fig. 3. Soluția constructivă a lagărului cu rulmenți**

Lagărele moletelor sunt echipate cu lagăre radial-oscilante cu bile, compuse din doi rulmenți cu role sferice tip 22224.

Aceste lagăre sunt mai economice și mai sigure în exploatare, având un coeficient de frecare mai redus și o durată de viață mai mare comparativ cu clasicele lagăre de alunecare. [6]

Figura 4 prezintă secțiunile geometrice a canalului de cablu pentru moletă, evidențiind forma și dimensiunile geometrice stabilite conform lucrărilor de specialitate.

Figura 4 b) ilustrează forma și dimensiunile geometrice ale noii molete propuse de noi pentru puțul Minei Unirea, aparținând salinei Slănic Prahova.



**Fig. 4. Soluția constructivă, dimensională și geometrică a moletelor**

Pe baza documentației de fabricație elaborată pentru noua moletă destinată puțului Minei Unirea, aparținând salinei Slănic Prahova, au fost stabilite caracteristicile tehnice ale acesteia și comparate cu valorile moletelor vechi, precum și cu cele recomandate de lucrările de specialitate; aceste date sunt prezentate în Tabelul 1.

**Tabelul 1. Caracteristicile tehnice ale moletelor noi de 2.500 mm**

| Nr. | Caracteristici tehnice                            | Notațiile din Fig. 1 | Unitatea de măsură | Valorile moletelor noi | Valorile moletelor vechi | Valori recomandate           |
|-----|---------------------------------------------------|----------------------|--------------------|------------------------|--------------------------|------------------------------|
| 1.  | Diametrul cablului                                | d                    | mm                 | 28                     | 28                       | -                            |
| 2.  | Diametrul moletelor                               | Dm                   | mm                 | 2.500                  | 2.500                    | $\geq 80 \cdot 28 = 2.240$   |
| 3.  | Raza de curbura a canalului de cablu al moletelor | r                    | mm                 | 15                     | 15                       | $\geq 0.53 \cdot 28 = 14,84$ |
| 4.  | Adâncimea canalului moletelor                     | h                    | mm                 | 79                     | 71                       | $\geq 1.5 \cdot 28 = 42$     |
| 5.  | Grosimea peretelui moletelor                      | a                    | mm                 | 9,4                    | 15                       | $\geq 28/3 + 3 = 12,3$       |

|     |                                                 |        |                |        |         |                      |
|-----|-------------------------------------------------|--------|----------------|--------|---------|----------------------|
| 6.  | Grosimea porțiunii pline a moletei de sub canal | b      | mm             | 41     | 30      | $\geq 28/3+10=19,3$  |
| 7.  | Unghiul de deschidere al canalului moletei      | 2      | grade          | 42     | 42      | $2 = 40 \dots 45$    |
| 8.  | Diametrul exterior al moletei                   | De     | mm             | 2.630  | 2.630   | $\geq Dm-d+2h=2.264$ |
| 9.  | Lățimea bazei canalului de cablu                | $l+2a$ | mm             | 100    | 110     | -                    |
| 10. | Lățimea maximă a moletei (în zona șuruburilor)  | -      | mm             | 290    | 345     | -                    |
| 11. | Masa moletei                                    | -      | kg             | 966,78 | 1.233,2 | Cât mai scăzut       |
| 12. | Momentul de girație al moletei                  | -      | $kg \cdot m^2$ | 475,88 | 993,05  | Cât mai scăzut       |

Tabelul de mai sus arată că, în cazul unei reduceri a masei cu 21,6 %, are loc o scădere a momentului de inerție cu 52,1 %, fapt ce îmbunătățește funcționarea mașinii de extracție atât la pornire, cât și la oprire.

În comparație cu recomandările lucrărilor de specialitate, lățimea marginii peretelui canalului a fost redusă, în timp ce adâncimea canalului a fost mărită.

Acest compromis a fost impus de grosimea tablei de 100 mm utilizată pentru fabricarea moletei, precum și de necesitatea creșterii adâncimii canalului pentru a îmbunătăți condițiile de înfășurare a cablului, prevenind astfel ieșirea sau alunecarea acestuia din canal în cazul frânării bruște a coliviei aflată în mișcare.

### 3. Extras din breviarul de calcul pentru noua soluție a moletei de 2.500 mm

În vederea stabilirii condițiilor de funcționare ale noilor molete, s-a păstrat același model de calcul utilizat pentru determinarea solicitărilor la care au fost supuse modelele vechi.

Pe baza relațiilor de calcul oferite de literatura de specialitate, s-a determinat modul în care apare uzura prin aderență, cauzată de rostogolirea și alunecarea cablului pe peretele canalului roții tăietoare.

Rezultatele arată că, în cazul unei presiuni de contact cablu-perete de  $1,01 \text{ N/mm}^2$ , pentru a îndepărta un volum de  $2,3 \text{ dm}^3$  de oțel din peretele canalului inelului moletei, în condițiile transportului a 2.000 de persoane pe săptămână, este necesară o durată de funcționare de 35,2 ani.

- Numărul de ani de funcționare al rulmenților lagărului nou:

$$N_{ani} = \frac{N_{col} \cdot N_{pers} \cdot N_{col}}{N_{vs} \cdot N_{sapt}} = 35.203 \text{ ani}$$

- Reacțiuni în punctele cadrului, în interiorul spițelor, în N:

$$R = 0.5 \cdot P_{cl1} \cdot l = 1.905 \cdot 10^4$$

- Modul de rezistență al moletei:

$$w_{xxc} = \frac{I_{xxc}}{y_{max}} = 1.035 \cdot 10^5$$

- Presiunea de contact maximă pe unitatea de lungime a circumferinței moletei, în  $\text{N/mm}^2$ :

$$P_{cl1} = \frac{(1+\varepsilon_1) \cdot S_{rc}}{Dm \cdot \sin(\theta_1 \cdot 0.5)} = 321.55$$

- Presiunea medie pe suprafața medie din unitatea de suprafață a circumferinței moletei, în  $\text{N/mm}^2$ :

$$P_{pcs} = \frac{k_{pc} \cdot (1+\varepsilon_1) \cdot F_{pcs}}{Dm \cdot d_c \cdot \sin(\theta_1 \cdot 0.5)} = 0.968$$

### 4. Modelarea 3D a moletei și analiza statică cu metoda elementului finit

După realizarea analizei tehnico-economice optime a moletei, conform lucrărilor de specialitate, s-a efectuat modelarea 3D utilizând software-ul de proiectare asistată SolidWorks. După proiectarea 3D, moleta a fost supusă încărcării statice cu forțele determinate în referatul de calcul, în vederea analizei prin metoda elementelor finite și a studiului cinematic.

Forțele de încărcare sunt determinate de greutatea cuștii, a cablului, a dispozitivului de fixare a cablului și de greutatea maximă transportată de cușcă, respectiv 8 persoane. După analiza elementelor care determină forțele de solicitare a moletei, a fost inițiată simularea statică prin intermediul a patru cazuri distincte.

Primul caz implică o forță maximă de-a lungul canalului roții tăietoare de 28.028 N, care include greutatea cuștii, greutatea cablului pe metru liniar și dispozitivul de fixare – acest caz reprezintă ridicarea cuștii goale la suprafață, cu o lungime a cablului de 20 metri.

Al doilea caz prezintă cușca goală, iar dispozitivul de fixare și cablul generează o forță de 33.706 N, cu o

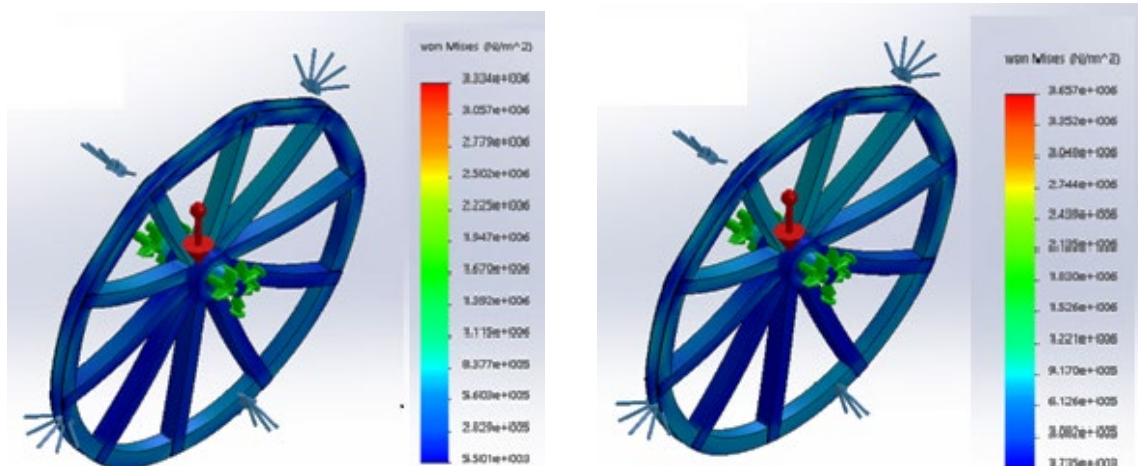


lungime maximă a cablului de 265 metri, celelalte elemente rămânând constante.

Al treilea caz este definit printr-o forță de 36.028 N, ce reprezintă greutatea cuștii încărcate cu 8 persoane, dispozitivul de fixare și cablul cu o lungime minimă de 20 metri.

Cazul al patrulea implică o forță maximă de 39.912 N, reprezentând sarcina maximă suportată de moletă în exploatare – adică greutatea cuștii încărcate cu 8 persoane, dispozitivul de fixare și cablul cu lungimea maximă de 265 metri. În toate cele patru cazuri, analiza cu metoda elementelor finite a luat în calcul și o presiune constantă pe pereții canalului roții tăietoare de 1,007 N, precum și accelerația gravitațională de 9,8 m/s<sup>2</sup>.

Figurile 5 și 6 prezintă rezultatele grafice ale analizei statice cu metoda elementelor finite. Pentru ilustrare au fost selectate două cazuri: cazul minim (Fig. 5), cu o forță de 28.028 N, și cazul maxim (Fig. 6), cu o forță de 39.912 N.



**Fig. 5.** Forța minimă aplicată moletii în cadrul simulării      **Fig. 6.** Forța maximă aplicată moletii în cadrul simulării

## 5. Concluzii

Eliminarea benzii de rulare din canalul moletii simplifică construcția și crește durata de viață a moletii. Moleta realizată din construcție sudată este mai ușor de fabricat și are un cost de producție mai redus comparativ cu cea turnată, prezentând un comportament superior în exploatare.

Reducerea masei cu 21,6% și a momentului de inerție cu 52,1% contribuie la îmbunătățirea condițiilor de exploatare ale mașinii de extracție la pornire și la oprire, precum și la creșterea coeficientului de siguranță. Rulmenții cu bile sunt mai economici și mai siguri în exploatare, prezentând un coeficient de frecare mai redus și o durată de viață mai mare decât lagărele cu alunecare.

Toate componentele moletii au fost verificate pentru o sarcină de rupere a cablului de 355 kN, iar coeficienții de siguranță obținuți au avut valori mai mari de 1,1, fiind comparați cu limita de curgere a oțelului.

Rotirea și torsiunea turnului cauzate de alunecările de teren impun verificarea continuă a poziționării moletelor față de mașina de extracție și a unghiului de deviere al cablului în timpul înfășurării pe moletă.

Soluțiile constructive rezultate în urma proiectării moletelor modernizate au fost proiectate și analizate cu ajutorul software-ului de proiectare, iar rezultatele au demonstrat că solicitările din structura nou concepută și realizată, nu depășesc valorile admisibile.

## Bibliografie:

1. Adam, D. C., (2008), *Instalații de extracție miniere*, vol. I și II, Ed. Universitas, Petroșani.
2. Bădiță (Popescu) D., ș.a., (2015), *Contributions to Request State Determination and Deformations in Tower of Extraction System Using Utility Solid Edge*, Balkan Mining Congress, ISSN 978-973-741-435-9-.
3. Buzdugan, Gh., (1979), *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, București.
4. Dumitrescu, I., (2009) *Fiabilitatea sistemelor de transport*, Ed. Focus, Petroșani.
5. Dumitrescu I., Apostu S., Vitan D.C., (2021), *Tehnologia materialelor – îndrumător de laborator*, Ed. Universitas, Petroșani.
6. Magyari, A., (1990), *Instalații mecanice miniere*, Ed. Tehnică, București.
7. Nicolae Ilias, ș.a., (1997), *Control System for the Operational Parameters of the Multi Rope Hoisting Installations*, Proceedings of the 6th International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection (MPES), Cehia, Ostrava.
8. Popescu. F. D., (2010), *Instalații de transport pe verticală*, Ed. Focus, Petroșani.
9. Popescu. F. D., și Mitran. I., (2009), *The Analysis of Vertical Transport Installations Considering the Theory of Automatic Systems*, Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on System science and simulation in engineering (ICOSSE '09), Genova, ISSN: 1790-2769, ISBN: 978-960-474-131-1, pp.125 -130.
10. Vitan D.C., (2024), *Reabilitarea mecanică a sistemelor industriale de mare complexitate*, Ed. Universitas, Petroșani.



# PROPRIETATEA DE COLINIARITATE ÎN MECANICĂ

**Autori:** Andrei Paul BOB <sup>1</sup>, Maria-Alexandra SAVA <sup>1</sup>  
paulbob2004@gmail.com

**Coordonatori:** Conf.univ.dr. ing Răzvan Bogdan ITU<sup>2</sup>, Șef lucr. dr. ing. Florin VÂLCEANU<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul II

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E

## Rezumat

În lucrare sunt prezentate unele aspecte privind proprietățile câmpului de viteze în mișcarea generală a rigidului din cinematică.

## Cuvinte cheie

Coliniaritate, puncte materiale

### 1. Introducere

Cinematica, ca parte a mecanicii, studiază mișcarea mecanică, fără a ține seama de mase, de forțe și de momente, adică urmărește în exclusivitate aspectul geometric al acesteia.

Instrumentul de rezolvare a oricărei probleme de mecanică îl constituie aplicarea uneia sau mai multor formule (în cazuri simple) sau a uneia sau mai multor metode (în cazuri mai complicate).

Trebuie precizat faptul că cunoașterea, însușirea și aplicarea corectă a unei metode de calcul la rezolvarea unei probleme constituie o chestiune de experiență, care se dobândește pe baza rezolvării unui număr considerabil de probleme.

Cunoașterea aprofundată a metodelor de rezolvare conduce la o rezolvare rapidă și sigură a problemelor indiferent de gradul lor de dificultate.

De asemenea în mecanică, cu precădere în cinematică, ca și în geometrie, se găsesc aspecte în care se face referire la proprietatea de coliniaritate, atât în teorie cât și în aplicații.

În cele ce urmează se vor prezenta aspecte privind metoda proprietății de coliniaritate, tratată pe un exemplu dintr-o problemă aplicativă.

### 2. Proprietatea de coliniaritate

Coliniaritatea este, în geometrie, proprietatea unui număr mai mare de două puncte de a aparține aceleiași drepte.

Mai multe puncte necoliniare sunt puncte ce nu pot aparține aceleiași drepte.

Se poate demonstra și folosind vectori și numere complexe, similar cu coplanaritatea.

Dintre metodele specifice pentru demonstrarea coliniarității folosite în geometrie amintim următoarele metode.

*Demonstrarea coliniarității cu ajutorul unghiului alungit (unghiuri suplimentare).*

Dacă  $A$  și  $C$  sunt situate de o parte și de alta a dreptei  $BD$  și  $m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = 180^\circ$ , atunci punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare (fig. 1).

*Demonstrarea coliniarității utilizând reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf.*

Dacă punctul  $B$  este situat pe dreapta  $DE$ , iar  $A$  și  $C$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $DE$  și  $\angle ABD = \angle CBE$ , atunci punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sunt coliniare (fig. 2).

*Demonstrarea coliniarității prin identificarea unei drepte ce conține punctele respective.*

Pentru a arăta ca punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sunt coliniare se identifică o dreaptă căreia ele să-i aparțină.

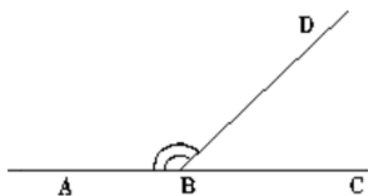


Fig. 1. Unghiuri suplimentare

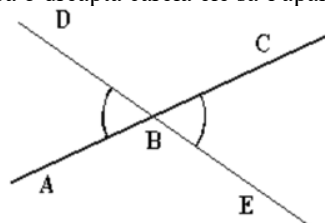


Fig. 2. Unghiuri opuse la vârf

Condiția de coliniaritate a trei puncte  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  se obține dacă punem condiția ca punctul  $C(x_3, y_3)$  să verifice ecuația dreptei  $AB$ , adică:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (1)$$

Condiția de coliniaritate a celor 3 puncte se mai poate scrie sub formă de determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

*Demonstrarea coliniarității punctelor folosind vectorii.*

Doi vectori sunt coliniari dacă au aceeași direcție. Acest lucru se întâmplă în cazul în care ambii vectori sunt nenuli și dreptele lor suport sunt paralele sau coincid și cazul în care unul dintre vectori este nul. Paralelismul vectorilor reprezintă un caz particular al coliniarității lor, lucru explicabil prin faptul că vectorii liberi nu au o poziție fixă și pot fi translați în orice punct al planului.

*Demonstrarea coliniarității punctelor folosind aplicațiile numerelor complexe în geometrie.*

Dacă punctele  $A, B, C$  au respectiv afixele  $z_A, z_B, z_C$ , atunci  $A, B, C$  sunt coliniare dacă și numai dacă  $(z_B - z_A) / (z_C - z_A) \in \mathbb{R}^*$ .

*Demonstrarea coliniarității punctelor utilizând proprietățile funcției arie:* dacă  $C \text{ Int}(\angle AOB)$  și  $A_{[AOB]} = A_{[AOC]} + A_{[BOC]}$ , atunci  $A, B, C$  sunt coliniare (se poate folosi și la patrulater).

*Demonstrarea coliniarității punctelor folosind asemănarea triunghiurilor (sau patrulaterelor):* fie  $N$  între  $B$  și  $C$ , dacă  $MN \parallel AB$  și  $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ , atunci  $B, N, C$  sunt coliniare.

### 3. Aplicarea condiției de coliniaritate la trei puncte de pe aceeași dreaptă

În cele ce urmează vom prezenta o aplicație în care se întrebuințează metoda mișcării inverse și condiția de coliniaritate aplicată la trei puncte ce se deplasează pe traiectorii diferite și sunt obligate să fie în permanență pe aceeași dreaptă.

Se consideră următoarea problemă:

Trei pomi sunt plantați pe un rând unul după altul, echidistant. Înălțimile acestora sunt  $h_1, h_2$  și respectiv  $h_3$ , cu  $h_2 > h_1 > h_3$ , iar vitezele lor de creștere anuale (considerate pentru fiecare constante!) sunt  $v_1, v_2$  și respectiv  $v_3$  cu  $v_1 > v_3 > v_2$ . După câți ani vârfurile pomilor vor fi coliniare?

De asemenea pentru soluționarea problemei va trebui să admitem neglijarea accelerației gravitaționale, deoarece creșterea pomilor este lentă.

O primă rezolvare o vom face folosind produsul vectorial al vectorilor  $\overrightarrow{A_1 B_1}$

și  $\overrightarrow{A_1 C_1}$  (determinați de punctele  $A_1, B_1, C_1$ , până unde au crescut pomi) punând condiția ca acesta să fie nul.

Astfel, din figura 4, avem :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1 B_1} &= \overrightarrow{AB_1} \Rightarrow \overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AA_1}, \\ \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1 C_1} &= \overrightarrow{AC_1} \Rightarrow \overrightarrow{A_1 C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AA_1}, \end{aligned}$$

dar:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB_1} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}, \\ \overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}, \end{aligned}$$

deci:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 B_1} &= \overrightarrow{l} + (h_2 + v_2 t) \overrightarrow{j} - (h_1 + v_1 t) \overrightarrow{j} = \overrightarrow{l} + (h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t) \overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{A_1 C_1} &= 2\overrightarrow{l} + (h_3 + v_3 t) \overrightarrow{j} - (h_1 + v_1 t) \overrightarrow{j} = 2\overrightarrow{l} + (h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t) \overrightarrow{j}, \end{aligned}$$

Punem condiția:

$$\overrightarrow{A_1 B_1} \times \overrightarrow{A_1 C_1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ l & h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t & 0 \\ 2l & h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

Dezvoltând determinantul și egalând cu zero relația obținută unde rezultă:

$$t(v_3 + v_1 - 2v_2) = 2h_2 - h_1 - h_3 \Rightarrow t = \frac{2h_2 - h_1 - h_3}{v_1 + v_3 - 2v_2}, \quad (7)$$

În continuare punem condiția ca vectorii  $\overrightarrow{A_1 B_1}$  și  $\overrightarrow{A_1 C_1}$  sunt colineari dacă și numai dacă au coordonatele (proiecțiile pe axe) proporționale, adică, deci dacă și numai dacă există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât:

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = \alpha \overrightarrow{A_1 C_1}, \quad (8)$$

Dar:

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = \alpha \overrightarrow{A_1 C_1} \Leftrightarrow (x_{B_1} - x_{A_1}) \overrightarrow{i} + (y_{B_1} - y_{A_1}) \overrightarrow{j} = (\alpha x_{C_1} - \alpha x_{A_1}) \overrightarrow{i} + (\alpha y_{C_1} - \alpha y_{A_1}) \overrightarrow{j},$$

de unde:

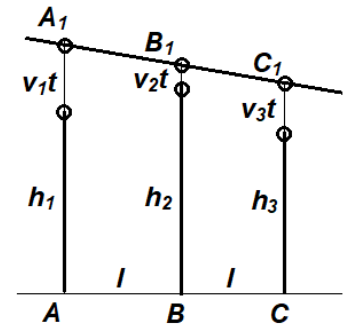


Fig. 3. Cei trei pomi

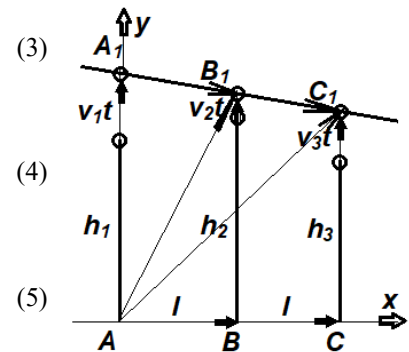


Fig. 4. Vectorii determinați

$$\begin{aligned} (x_B - x_{A_1}) &= \alpha (x_{C_1} - x_{A_1}) \quad (y_{B_1} - y_{A_1}) = \alpha (y_{C_1} - y_{A_1}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{x_{C_1} - x_{A_1}} &= \frac{y_{B_1} - y_{A_1}}{y_{C_1} - y_{A_1}} \quad \text{cu } x_{C_1} - x_{A_1} \neq 0, \quad y_{C_1} - y_{A_1} \neq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

Astfel conform figurii 4, pentru punctele  $A_I$ ,  $B_I$  și  $C_I$  avem:

$$\begin{aligned} \overline{AA_1} &= 0\bar{i} + (h_1 + v_1 t)\bar{j} \\ \overline{AB_1} &= l\bar{i} + (h_2 + v_2 t)\bar{j}, \\ \overline{AC_1} &= 2l\bar{i} + (h_3 + v_3 t)\bar{j} \end{aligned} \quad (10)$$

Rezultă, deci:

$$\frac{x_{B_1} - x_{A_1}}{x_{C_1} - x_{A_1}} = \frac{y_{B_1} - y_{A_1}}{y_{C_1} - y_{A_1}} = \frac{l}{2l} = \frac{h_2 + v_2 t - (h_1 + v_1 t)}{h_3 + v_3 t - (h_1 + v_1 t)} \Rightarrow t = \frac{2h_2 - h_1 - h_3}{v_1 + v_3 - 2v_2}, \quad (11)$$

Se observă că relația (11) este identică cu relația (7).

În continuare vom determina relația de coliniaritate pentru punctele  $M_I$ ,  $M_2$  și  $M_3$  folosind numerele complexe.

Prin asocierea  $z = x + iy$ , mulțimii  $R$  a numerelor reale îi corespunde axa  $Ox$  numită, în acest context, axa reală, iar mulțimii  $iR$  a numerelor imaginare, axa  $Oy$ , numită axa imaginară.

Planul ale cărui puncte se identifică cu numerele complexe prin funcția  $g$  o  $f$ , definită mai înainte, se numește planul complex.

Afixele punctelor  $A_I$ ,  $B_I$ , și  $C_I$ , conform figurii 5 sunt  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ . Punctele sunt coliniare dacă și numai dacă  $(z_3 - z_1)/(z_3 - z_2)$  aparține  $R$ .

Conform figurii 5 și a relațiilor cinematice din mecanică, avem că:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1, \quad z_1 = 0 + i(h_1 + v_1 t); \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad z_2 = l + i(h_2 + v_2 t), \\ z_3 &= x_3 + iy_3, \quad z_3 = 2l + i(h_3 + v_3 t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{x_3 + iy_3 - (x_1 + iy_1)}{x_2 + iy_2 - (x_1 + iy_1)} = \frac{x_3 - x_1 + i(y_3 - y_1)}{x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2l - 0 + i[h_3 + v_3 t - (h_1 + v_1 t)]}{l - 0 + i[h_2 + v_2 t - (h_1 + v_1 t)]} &= \frac{2l + i(h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t)}{l + i(h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t)} = \lambda \end{aligned} \quad (13)$$

unde  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Astfel vom avea:

$$\begin{aligned} \frac{2l + i(h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t)}{l + i(h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t)} &= \lambda \Leftrightarrow 2l + i(h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t) = \lambda [l + i(h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t)], \\ \Leftrightarrow 2l - \lambda l &= \lambda i(h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t) - i(h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t) \end{aligned} \quad (14)$$

Pentru ca ultima relație din (14),  $2l - \lambda l = \lambda i(h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t) - i(h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t)$ , trebuie să avem:  $2l - \lambda l = 0$  și  $\lambda i(h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t) - i(h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t)$ , de unde va rezulta:

$$\lambda = 2 \quad \text{și} \quad \lambda = \frac{h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t}{h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t}, \quad (15)$$

Egalând cele două ecuații din (15) rezultă:

$$\frac{h_3 - h_1 + v_3 t - v_1 t}{h_2 - h_1 + v_2 t - v_1 t} = 2 \Rightarrow t(v_3 + v_1 - 2v_2) = 2h_2 - h_1 - h_3 \Rightarrow t = \frac{2h_2 - h_1 - h_3}{v_3 + v_1 - 2v_2}, \quad (16)$$

Relația (16) este identică cu relația (7).

Vom considera în continuare condiția coliniarității cu ajutorul unghiului alungit (unghiuri suplimentare). Dacă  $A_I$  și  $C_I$  sunt situate de o parte și de alta a dreptei  $AB_I$  și  $m(\angle A_I B_I A) + m(\angle A B_I C_I) = 180^\circ$  (fig. 6), atunci punctele  $A_I$ ,  $B_I$ , și  $C_I$ , sunt coliniare.

Luând în considerare figura 6, vom face următoarele notații:

$$\begin{aligned} \square AA_1 B_1 &= \alpha, \quad \square AC_1 B_1 = \beta, \\ \square A_1 A B_1 &= \varphi_1, \quad \square B_1 A C_1 = \varphi_2, \\ \square A_1 B_1 A &= \delta_1, \quad \square AB_1 C_1 = \delta_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Din  $\triangle AA_1 B_1$  rezultă că:

$$\alpha + \delta_1 + \varphi_1 = 180^\circ,$$

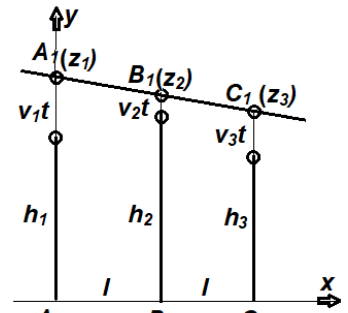


Fig. 5. Afixele pentru  $A_I$ ,  $B_I$ ,  $C_I$

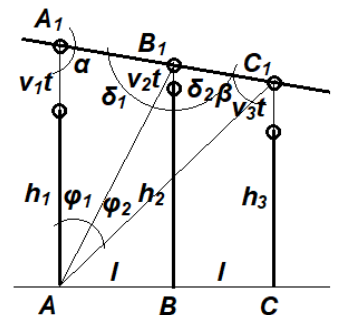


Fig. 6. Cazul unghiului alungit

Din  $\triangle AB_1C_1$  rezultă că:

$$\beta + \delta_2 + \varphi_2 = 180^\circ, \quad (19)$$

Din  $\triangle AA_1C_1$  rezultă că:

$$\alpha + \beta + \varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ, \quad (20)$$

Adunând relațiile (18) și (19), rezultă:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta_1 + \varphi_1 + \beta + \delta_2 + \varphi_2 &= 180^\circ + 180^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 &= 180^\circ + 180^\circ - (\alpha + \beta + \varphi_1 + \varphi_2) \Rightarrow, \\ \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 &= 180^\circ + \cancel{180^\circ} - \cancel{180^\circ} \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 180^\circ \end{aligned} \quad (21)$$

Atunci ultima relație din (21) devine:

$$\square A_1B_1A + \square AB_1C_1 = 180^\circ, \quad (22)$$

De unde rezultă că punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  sunt coliniare și atunci vectorii  $\overrightarrow{A_1B_1}$  și  $\overrightarrow{A_1C_1}$  fiind coliniari produsul lor vectorial va fi nul.

În continuare utilizăm asemănarea triunghiurilor. Ducem drepte paralele la dreapta  $ABC$  prin  $B_1$  și respectiv  $C_1$  (fig. 7). Se obțin triunghiurile  $A'A_1B_1$  și  $B_1B_1C_1$ , și din condiția ca ele să fie asemenea rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{h_1 + v_1t - (h_2 + v_2t)}{h_2 + v_2t - (h_3 + v_3t)} &= \frac{l}{l} = 1 \Rightarrow h_1 + v_1t - h_2 - v_2t = h_2 + v_2t - h_3 - v_3t \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1t - v_2t - v_2t + v_3t &= h_2 - h_3 + h_2 - h_1 \Rightarrow t = \frac{2h_2 - h_1 - h_3}{v_1 + v_3 - 2v_2} \end{aligned} \quad (23)$$

Rezultă că punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  sunt coliniare.

În final utilizăm proprietățile funcției arie (fig. 8). Punem condiția ca:

$$Aria[\triangle AA_1C_1C] = Aria[\triangle AA_1B_1B] + Aria[\triangle BB_1C_1C], \quad (24)$$

Astfel avem:

$$\begin{aligned} \frac{[(h_1 + v_1t) + (h_3 + v_3t)]2l}{2} &= \\ = \frac{[(h_1 + v_1t) + (h_2 + v_2t)]l}{2} + \frac{(h_2 + v_2t) + (h_3 + v_3t)l}{2} \cdot \frac{2}{l} \Rightarrow, \\ \Rightarrow 2(h_1 + v_1t) + 2(h_3 + v_3t) &= \\ = (h_1 + v_1t) + (h_2 + v_2t) + (h_2 + v_2t) + (h_3 + v_3t) \end{aligned} \quad (25)$$

În urma calculelor efectuate rezultă:

$$t = \frac{2h_2 - h_1 - h_3}{v_1 + v_3 - 2v_2}, \quad (26)$$

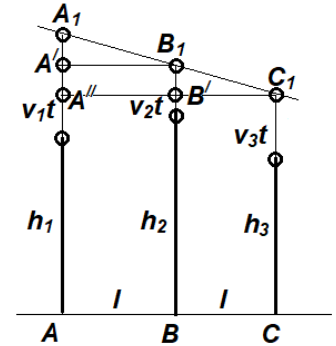


Fig. 7. Condiția de asemănare

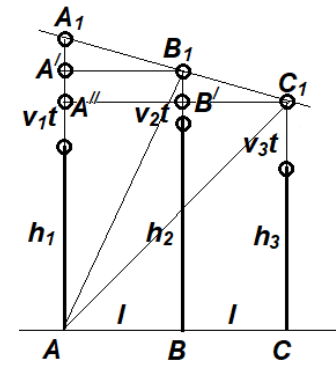


Fig. 8. Trapezele

## Concluzii

Interdisciplinaritatea este o cooperare între discipline diferite din aceeași arie curriculară, privind un anumit fenomen, proces a cărui complexitate poate fi demonstrată, explicată, rezolvată numai prin acțiunea a mai multor factori.

Interdisciplinaritatea presupune abordarea conținuturilor complexe având ca țel formarea unei imagini unitare asupra unei anumite teme. Aceasta implică combinarea a două sau mai multe discipline academice într-o singură activitate. Astfel, acumulezi cunoștințe noi pe mai multe domenii simultan.

Mecanica este dependentă de matematică și putem să ne dăm seama de acest lucru din faptul că nu putem rezolva aproape nicio problemă de mecanică fără matematică.

În lucrarea s-a arătat prin exemplul considerat legătura strânsă dintre cele două discipline fundamentale, matematica și mecanica.

## Bibliografie

1. V. Bobeanu, *Caleidoscop Matematic*, Editura Albatros, București, 1979;
2. \*\*\* [chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://ctptc-airinei.ro/interdisciplinaritate.pdf](https://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://ctptc-airinei.ro/interdisciplinaritate.pdf)
3. \*\*\* <https://racext.com/ro/do-you-need-math-for-mechanics/>

# Teorema lui Lamy în probleme de mecanică

**Autori:** Ana-Maria IORGA <sup>1</sup>, Sorina MORAR

**Coordonatori:** Conf.univ.dr. ing Răzvan Bogdan ITU <sup>2</sup>, Asist.univ.dr.ing Alexandra ȘOICA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E

## Rezumat

În lucrare se prezintă demonstrarea teoremei lui Bernard Lamy (cunoscut[ sub de numirea de Teorema lui Lami) precum și exemple privind aplicarea acesteia la rezolvarea în unele probleme de statică din mecanică

## Cuvinte cheie

Teoremă, Lamy, statică, mecanică

### 1. Introducere

Teorema lui Bernard Lamy (cunoscut și sub numele de Bernard Lami) este o teoremă simplă și utilă în statică, un capitol al mecanicii care se ocupă cu forțele și efectele acestora în timp ce obiectele sunt în repaus. Este numit după omul de știință francez Bernard Lamy.

Teorema afirmă că dacă trei forțe care acționează într-un punct sunt în echilibru (vezi figura 1), atunci fiecare forță este proporțională cu sinusul unghiului dintre celelalte două forțe.

Din punct de vedere matematic, poate fi reprezentat astfel:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}, \quad (1)$$

unde  $F_1$ ,  $F_2$  și  $F_3$  sunt mărimile forțelor și  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sunt unghiurile dintre forțe.

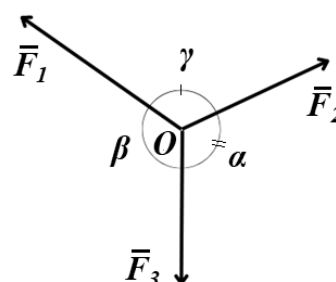


Fig. 1. Forțe concurente în echilibru

### 2. Teorema lui Bernard Lamy

În continuare vom arăta că, dacă sub acțiunea a trei forțe concurente un corp rămâne în echilibru, fiecare forță este direct proporțională, în modul, cu sinusul unghiului dintre celelalte două forțe.

Vom considera trei forțe  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  și  $\vec{R}$  ce acționează asupra unui corp  $O$ . Echilibrul corpului presupune satisfacerea condiției:

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0, \quad (2)$$

adică situația din figura 2 (corpul fiind  $O$ ) cu:

$$|\vec{P} + \vec{Q}| = |\vec{R}|, \quad (3)$$

Scriem teorema sinusurilor în triunghiul  $COD$  (fig.2):

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma} = \text{const} (=K), \quad (4)$$

Astfel:

$$P = K \sin \alpha, \quad Q = K \sin \beta, \quad R = K \sin \gamma, \quad (5)$$

cu (vezi figura 2):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \angle (\vec{Q}, \vec{R}) \\ \sin \beta &= \sin(180^\circ - \beta) = \sin \angle (\vec{P}, \vec{R}), \\ \sin \gamma &= \sin(180^\circ - \gamma) = \sin \angle (\vec{P}, \vec{Q}) \end{aligned} \quad (6)$$

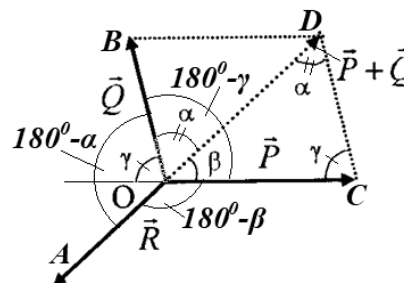


Fig. 2. Echilibrul corpului

### 3. Exemple privind aplicarea teoremei lui Lamy la rezolvarea unor probleme de statică

În continuare vom prezenta exemple de probleme în rezolvarea cărora s-a întrbuințat teorema lui Lamy. La unele dintre probleme rezolvarea s-a făcut și cu ajutorul condițiilor “ clasice” de echilibru din statică și cu teorema lui Lamy. Acest lucru s-a făcut pentru a pute compara care dintre metodele folosite la rezolvarea acestor probleme este mai eficientă.

#### Problema 1

O particulă este așezată pe o planșetă aspră, înclinată sub unghiul  $\alpha$  față de orizontală. Asupra ei acționează sub

unghiul  $\beta$  față de dreapta  $CD$  (linia de cea mai mare pantă), o forță  $\vec{F}$  paralelă cu planul planșetei, ca în figura 3.

Cunoscând coeficientul de frecare dintre corp și planșetă  $\mu$  și știind că echilibrul realizat este „la limită”, se cere să se determine direcția în care va începe să se miște particula.

*Rezolvare:*

Dacă corpul are greutatea  $G$ , reacțiunea normală pe planșetă în  $A$  este:

$$N = G \cos \alpha, \quad (7)$$

Pe direcția  $AD$  acționează forța  $G \sin \alpha$ .

Să presupunem că forța de frecare:

$$F_f = \mu N = \mu G \cos \alpha, \quad (8)$$

acționează ca în figura 3, pe direcția  $AB$ , adică sub unghiul  $\theta$  față de  $DC$ . Particula va începe să se miște pe direcția  $BA$ .

Cele trei forțe fiind concurente în  $A$  putem aplica teorema lui Lamy:

$$\frac{\mu N}{\sin \beta} = \frac{G \sin \alpha}{\sin(\beta + \theta)} = \frac{F}{\sin \theta}, \quad (9)$$

De aici:

$$\sin(\beta + \theta) = \frac{\mu G \cos \alpha \cdot \sin \beta}{F}, \quad (10)$$

relație care îl determină pe  $\theta$ .

### Problema 2

Un punct material  $A$  de greutate  $\vec{G}$  se află pe un plan înclinat ce formează unghiul  $\alpha$  cu orizontala. Punctul este legat cu un fir de punctul fix  $B$ , iar firul face unghiul  $\beta$  cu planul înclinat (fig. 4, a). Se cere să se determine forțele de legătură ce acționează punctul material în poziția dată, la echilibru de repaus (fig. 4, b).

*Rezolvare:*

Vom rezolva problema punând condițiile de echilibru din statică. Condiția de echilibru la repaus este de forma:

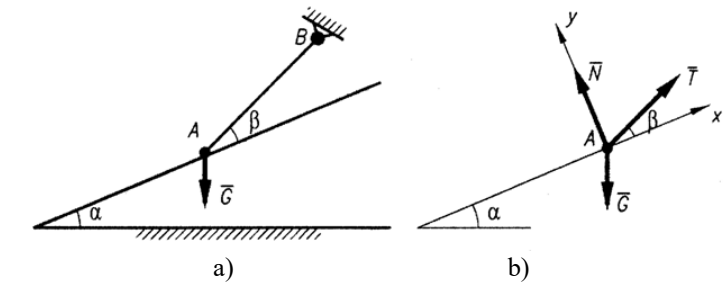


Fig. 4. Punctul material pe plan și forțele la care este supus

$$\vec{T} + \vec{G} + \vec{N} = 0, \quad (11)$$

iar în formulare scalară (a proiecțiilor pe axele sistemului de referință ales) avem:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \quad T \cos \beta - G \sin \alpha = 0 \\ \sum Y_i &= 0; \quad T \sin \beta - G \cos \alpha + N = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

de unde prin rezolvarea sistemului (12) obținem:

$$\begin{aligned} T \cos \beta - G \sin \alpha &= 0 \Rightarrow T = G \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \\ T \sin \beta - G \cos \alpha + N &= 0 \\ \Rightarrow N &= G \cos \alpha - T \sin \beta \Rightarrow \\ \Rightarrow N &= G \cos \alpha - G \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \sin \beta \Rightarrow \\ \Rightarrow N &= \frac{G \cos \alpha \cos \beta - G \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow N &= G \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \end{aligned} \quad (13)$$

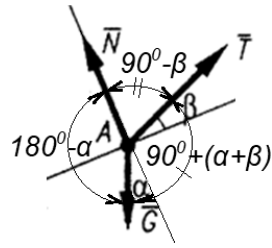
În continuare vom rezolva problema cu ajutorul teoremei lui Lamy, Teorema lui Lamy conform figurii 5 este dată de relația:

$$\frac{N}{\sin[90^\circ + (\alpha + \beta)]} = \frac{G}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{T}{\sin(180^\circ - \alpha)}, \quad (14)$$

dar:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(90^\circ - \beta) &= \cos \beta \\ \sin[90^\circ + (\alpha + \beta)] &= \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Fig. 5. Forțele concurente



Rezultă că:

$$\frac{N}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{G}{\cos \beta} = \frac{T}{\sin \alpha}, \quad (15)$$

de unde avem că:

$$\frac{N}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{G}{\cos \beta} \Rightarrow N = G \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}; \quad \frac{T}{\sin \alpha} = \frac{G}{\cos \beta} \Rightarrow T = G \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}, \quad (16)$$

În ambele cazuri s-a obținut același rezultat.

### Problema 3

O sferă de greutate  $\bar{G}$  se sprijină în punctele  $A$  și  $B$  pe două plane fixe, înclinate cu unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  față de orizontală. Se cere să se afle reacțiunile în punctele de contact (fig. 6, a).

Rezolvare:

Ca și la problema precedentă vom rezolva mai întâi problema punând condițiile de echilibru din statică.

Condițiile scalare de echilibru față de axele sistemului de referință ales sunt (fig. 6, b):

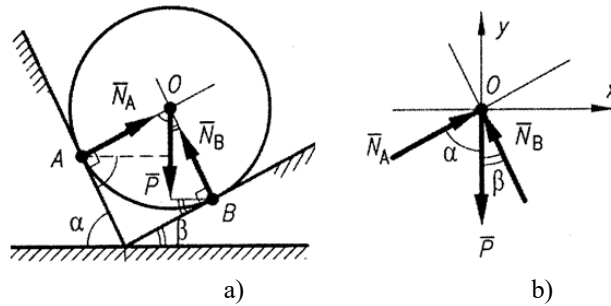


Fig. 6. Sfera și forțele la care este supusă

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \quad N_A \sin \alpha - N_B \sin \beta = 0 \\ \sum Y_i &= 0; \quad N_A \cos \alpha + N_B \cos \beta - P = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

de unde prin rezolvarea sistemului (17) obținem:

$$\left. \begin{aligned} N_A \sin \alpha - N_B \sin \beta &= 0 \Rightarrow N_A = N_B \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \\ N_A \cos \alpha + N_B \cos \beta &= P \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} N_B \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha + N_B \cos \beta &= P \cdot \sin \alpha \Rightarrow \\ N_B (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) &= P \sin \alpha \Rightarrow N_B = P \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_A = P \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (18)$$

În continuare vom rezolva problema cu ajutorul teoremei lui Lamy, Teorema lui Lamy conform figurii 7 este dată de relația:

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{N_A}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{N_B}{\sin(180^\circ - \alpha)}, \quad (19)$$

dar:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(180^\circ - \beta) &= \sin \beta \end{aligned}$$

Rezultă că:

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{N_A}{\sin \beta} = \frac{N_B}{\sin \alpha}, \quad (20)$$

de unde avem că:

$$\frac{N_A}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow N_B = P \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad \frac{N_A}{\sin \beta} = \frac{P}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow N_A = P \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (21)$$

În ambele cazuri s-a obținut același rezultat.

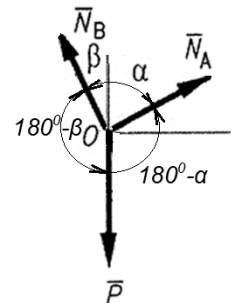


Fig. 7. Forțele concurente



#### Problema 4

O tijă neomogenă al cărei centru de greutate se află la distanțele  $a$  și respectiv  $b$  față de capete, se sprijină pe două plane înclinate cu unghiurile  $\alpha$  și respectiv  $\beta$  față de orizontală. Considerând că la contactul capetelor tijei cu planele înclinate nu există frecare și că planul vertical ce conține tijă este perpendicular pe muchia orizontală comună de la baza planelor înclinate, se cere să se determine unghiul  $\theta$  format de tijă cu orizontala în poziția de echilibru precum și valoarea forțelor de reacțiune (fig. 8).

Rezolvare:

Echilibrul momentelor celor trei forțe ( $\vec{S}, \vec{G}, \vec{R}$ ) impune ca suporturile lor să fie concurente într-un punct (punctul  $O'$  din figură). În acest punct se formează unghiuri egale cu cele ale planelor înclinate ( $\alpha$  și  $\beta$  ca unghiuri cu laturile perpendiculare).

Pentru determinarea unghiului  $\theta$  avem nevoie de teorema următoare, care este foarte utilă în rezolvarea unor probleme de statică.

Dacă  $P$  este un punct de pe baza  $AB$  a unui triunghi  $ABC$  care împarte această bază în raportul  $PA/PB = m/n$ , respectiv dreapta  $CP$  împarte unghiul  $C$  în două părți notate cu  $\alpha$  și  $\beta$ , atunci:

$$(m+n) \operatorname{ctg} \theta = m \operatorname{ctg} \alpha - n \operatorname{ctg} \beta \text{ sau } (m+n) \operatorname{ctg} \theta = n \operatorname{ctg} \beta - m \operatorname{ctg} \alpha, \quad (22)$$

unde  $\theta$  este unghiul  $CPB$ .

Conform relației (22) pentru cazul din problemă putem scrie:

$$(a+b) \operatorname{ctg} \theta = b \operatorname{ctg} \beta - a \operatorname{ctg} \alpha \text{ cu } \operatorname{ctg} \theta = \operatorname{ctg} \angle O'PA = \operatorname{tg} \theta, \quad (23)$$

și astfel se determină unghiul  $\theta$ , obținând:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b \sin \alpha \cos \beta - a \sin \beta \cos \alpha}{(a+b) \sin \alpha \cdot \sin \beta}, \quad (24)$$

Pentru determinarea forțelor de reacțiune în baza teoremei Lamy avem:

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{S}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (25)$$

din care se pot exprima reacțiunile  $R$  și  $S$  în funcție de  $G$ ,  $\alpha$  și  $\beta$ . Este de remarcat faptul că  $R$  și  $S$  nu depind de unghiul  $\theta$ .

Problema se poate rezolva și cu ajutorul condițiilor „clasice” de echilibru. Anularea rezultantei forțelor se scrie astfel:

$$R \cos \alpha + S \cos \beta = G \text{ (pe verticală)}, \quad R \sin \alpha = S \sin \beta, \text{ (pe orizontală)}. \quad (26)$$

Anularea momentului forțelor (în raport cu centrul de greutate  $P$ ) ne dă:

$$Ra \cos(\alpha - \theta) = S \cos(\beta + \theta). \quad (27)$$

Ultima relație ni-l determină pe  $\theta$  iar primele două pe  $R$  și  $S$ . Reacțiunile sunt:

$$R = G \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad S = G \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (28)$$

și nu depind de localizarea centrului de greutate pe bară și nici de unghiul  $\theta$  al echilibrului.

#### Concluzii

Teorema lui Lamy este relația dintre trei forțe coplanare, concurente și necoliniare și unghiurile acestora.

Importanța sa este că oferă o metodă simplificată de analiză și de predicție a comportamentului forțelor în diferite structuri, ajutând la proiectarea și optimizarea componentelor mecanice.

Teorema lui Lamy presupune că forțele sunt coplanare, concurente, iar sistemul este în echilibru static.

Teorema lui Lamy este aplicabilă în mod specific sistemelor de forțe coplanare, concurente, cu trei forțe. Nu este valabil pentru sisteme de forțe neconcurente sau sisteme cu mai mult sau mai puțin de trei forțe.

Teorema lui Lamy este limitată la trei forțe concurente într-un sistem coplanar. Teorema lui Lami nu se aplică sistemelor cu mai mult de trei forțe sau forțe care acționează în spațiul tridimensional.

Teorema lui Lamy oferă o metodă simplificată pentru analiza sistemelor de forțe coplanare prin reducerea numărului de ecuații necesare pentru echilibru. Este deosebit de util atunci când aveți de-a face cu forțe concurente care acționează asupra unui corp rigid.

Prin exemplele analizate s-a subliniat importanța folosirii acestei teoreme în rezolvarea unor probleme de echilibru static, respectându-se condițiile de aplicare a acestei teoreme.

#### Bibliografie

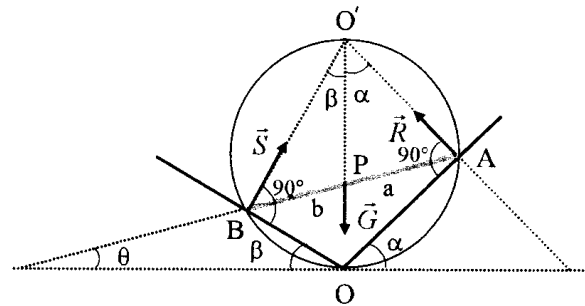


Fig. 8. Sprijinirea tijei

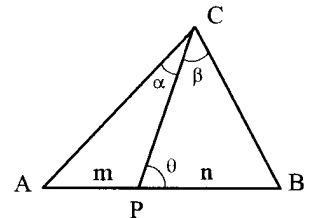


Fig. 9. Împărțirea bazei

1. Uliu, Fl., Măceșanu, Fl., *Mecanică fizică. Probleme ...captivante (cu soluții complete)*, Ediția a 9-a, Editura Emia, Deva, 2020;
2. \*\*\* <https://www.geeksforgeeks.org/lamis-theorem/>
3. \*\*\* <https://www.mechanicaleducation.com/application-of-lamis-theorem/>

# ASPECTE PRIVIND MODELUL MECANIC PENTRU ILUSTRAREA SOFISMULUI LUI ARISTOTEL

**Autori:** Daniel Bogdan TOPLICIANU <sup>1</sup>, Ana-Maria IORGA <sup>1</sup>  
[bogdandaniel576@gmail.com](mailto:bogdandaniel576@gmail.com)

**Coordonatori:** Conf. univ.dr. ing Răzvan Bogdan ITU <sup>2</sup>, Lector univ.dr. Anamaria POPESCU<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E

<sup>3</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de Științe Economice, Administrative și Sociale

## Rezumat

Modelul mecanic pentru ilustrarea sofismului lui Aristotel este denumit cu titlul „Roata lui Aristotel”. În lucrare sunt prezentate aspecte privind modelul mecanic pentru ilustrarea sofismului lui Aristotel.

## Cuvinte cheie

Sofism, model mecanic

### 1. Introducere

Un sofism este un raționament corect în aparență, dar fals în realitate. Paralogismul este un sofism involuntar (neintenționat).

Sofismul este un raționament care, din punct de vedere formal, este corect, dar greșit din punctul de vedere al conținutului. Spre deosebire de paralogism, care este un raționament fals, dar făcut din neștiință, fără intenția de a induce în eroare, sofismul se bazează pe ambiguitate, pe echivoc, pe aspecte neesențiale, tocmai pentru a induce în eroare auditoriul, în mod premeditat.

„Roata lui Aristotel” este un model mecanic conceput pentru a ilustra sofismul atribuit lui Aristotel, că: toate cercurile au aceeași lungime (!).

### 2. Modelul mecanic pentru ilustrarea sofismului lui Aristotel.

Modelul constă, în fond, din două roți solidare, cu aceeași axă și de raze diferite. Ele se vor învârti pe câte o șină, acestea fiind, bineînțeles, paralele (fig. 1).

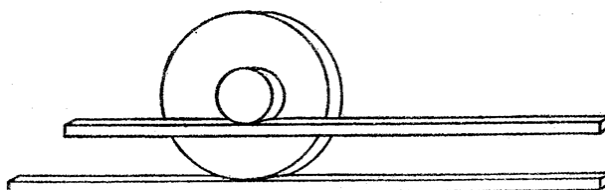


Fig. 1. Modelul cu roțile solidare

Transpunând în limbaj geometric, circumferințele celor două roți sunt cercurile  $C_1$  și  $C_2$ , care se vor mișca ca un tot pe tangentele lor,  $T_1U_1$  și, respectiv,  $T_2U_2$ , duse în punctele  $T_1$  și  $T_2$  situate pe aceeași rază  $OT_1$  (fig. 2).

Presupunind ca cercul  $C_1$ , rostogolindu-se pe dreapta  $T_1U_1$ , efectuează o rotație completă, în urma căreia punctul  $T_1$  ocupa poziția  $T_1'$  atunci cercul  $C_2$  descrie, de asemenea, o rotație completă, iar punctul  $T_2$  ocupa poziția  $T_2'$  pe raza  $O'T_1'$  care este paralela  $OT_1$  (deoarece amândouă sunt perpendiculare pe  $T_1U_1$ ). De aici se deduce că:

$$T_1T_1' = T_2T_2', \quad (1)$$

adică ambele cercuri au parcurs, la o rotație completă, drumuri egale, deci au aceeași lungime, și, întrucât cercurile  $C_1$  și  $C_2$  sunt absolut arbitrare, rezultă că toate cercurile au aceeași lungime (!)

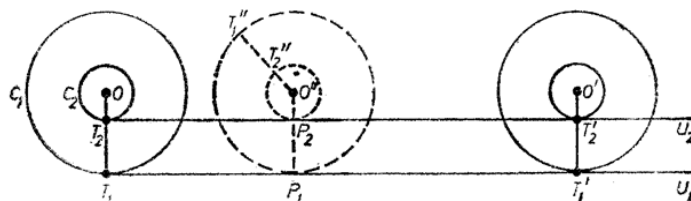


Fig. 2. Transpunerea modelului în limbaj geometric

Evident, s-a ajuns la o absurditate; unde este greșeala?

### 3. Descoperirea greșelii de raționament

Reținând că un sofism matematic este un raționament corect din punct de vedere formal, dar greșit din punct de vedere al conținutului, bazându-se pe un echivoc, pe o greșală ascunsă sau pe utilizarea aspectelor neesențiale ale fenomenelor - vom recunoaște că partea slabă a raționamentului făcut în enunț e considerarea caracterului vag al expresiei rostogolire (fenomenului de rostogolire) pe o dreaptă.

Din punct de vedere cinematic, prin rostogolire fără alunecare a unui cerc pe o dreaptă se înțelege că cercul se mișcă astfel încât, în orice moment, el este tangent la dreaptă și că punctul de tangență (numit centru instantaneu de rotație) are, în acel moment, viteza nulă; urmează de aici că viteza oricărui punct legat de cerc - nu neapărat de pe circumferință - este, în fiecare moment, aceea pe care ar avea-o dacă cercul s-ar roti în jurul centrului instantaneu de rotație, iar direcția acestei viteze este perpendiculară pe dreapta care unește punctul considerat cu acest centru.

O dată precizat înțelesul expresiei rostogolire, de-acum devine clar că, dacă unul dintre cercurile solidar legate se rostogolește, celălalt nu se rostogolește.

Într-adevăr, menținând afirmația că, de exemplu, cel mai mare dintre cercurile concentrice se rostogolește fără alunecare pe dreapta  $T_1U_1$  (v. fig. 2), cu siguranță cel mai mic nu se rostogolește la fel pe dreapta  $T_2U_2$ , deoarece, dacă și cercul mic s-ar rostogoli fără alunecare, în momentul în care centrul comun al cercurilor se găsește în  $O''$ , figura în mișcare ar avea, în același timp, două centre instantanee de rotație,  $P_1$  și  $P_2$ , și atunci viteza punctului  $T_1'$  (poziția punctului  $T_1$  când cercurile se rotesc cu un anumit unghi) ar fi orientată perpendicular atât pe  $P_1T_1'$ , cât și pe  $P_2T_1'$  - ceea ce este imposibil.

#### 4. Exemplet de raționament corect

Două roți solidar de raze  $R$  și  $r$  (fig. 3) sunt antrenate simultan cu două cremaliere, imprimându-se punctelor  $A$  și  $B$  vitezele cunoscute  $\vec{v}_1 \triangleright \vec{v}_2$ . Să se determine poziția centrului instantaneu de rotație, viteza unghiulară instantanee și viteza centrului comun al celor două roți.

Se prezintă în continuare rezolvarea.

Se găsește poziția centrului instantaneu de rotație ținând cont că distribuția de viteze față de acest punct este aceeași ca la mișcarea de rotație.

Din asemănarea triunghiurilor formate rezultă:

$$IB = \frac{v_2(R+r)}{v_1 - v_2}, \quad (2)$$

Cu poziția lui  $I$  determinată, rezultă:

$$\omega = \frac{v_2}{IB} = \frac{v_1 - v_2}{R+r}, \quad (3)$$

și

$$v_O = \omega IO = \frac{v_1 R + v_2 r}{R+r}, \quad (4)$$

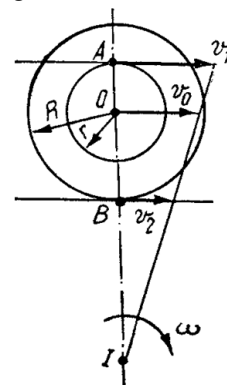


Fig. 3. Roțile solidar antrenate simultan

#### Concluzii

Dacă sofistii ("specialiști" în "a ști"), în antichitate foloseau sofismul ca o redutabilă "armă" retorică, în prezent, apelul la sofism, în diverse contexte comunicaționale, are un scop precis, acela de a induce în eroare interlocutorul, elementul comun între antici și moderni fiind indiferența față de adevăr, față de principiile etice și orgoliul de a avea întotdeauna dreptate.

Deși termenul de sofism poate părea arhaic, influența sa se regăsește chiar și în limbajul nostru cotidian. Înțelegerea sa corectă ne ajută să identificăm și să evităm argumentațiile înșelătoare.

În era informației, sofismele pot lua forme noi, adesea îmbrăcate în argumente aparent logice. Recunoașterea acestora necesită o minte critică și o bună cunoaștere a logicii.

Identificarea sofismelor în discuții, dezbateri sau pe rețelele sociale poate îmbunătăți claritatea comunicării și autenticitatea argumentelor.

Aristotel a întemeiat și sistematizat domenii filozofice ca logica, științele naturii, metafizica, etica și estetica. Organizarea cunoașterii în acest sistem a fost un punct de referință în civilizația europeană până la sfârșitul secolului al XVII-lea.

A rafinat învățăturile lui Socrate privind gândirea critică sistematică și folosirea întrebărilor pentru a stabili adevărata natură a realității dincolo de felul în care lucrurile apar la prima privire

#### Bibliografie

1. V. Bobeanu, *Caleidoscop Matematic*, Editura Albatros, București, 1979;
2. \*\*\* <https://destepti.ro/ce-este-sofismul-dar-un-sofist-de-la-antici-la-moderni/>
3. \*\*\* <https://ro.wikipedia.org/wiki/Aristotel>

# STUDIUL TENSIUNILOR ÎN SUPAPE FLUTURE BIPLANE PENTRU APLICAȚII INDUSTRIALE AVANSATE

**Autor(i):** Titus FRENȚIU<sup>1</sup>, Alexandru MINA<sup>2</sup>

[timeandrhythm@yahoo.com](mailto:timeandrhythm@yahoo.com)

[contact@mad-milling.ro](mailto:contact@mad-milling.ro)

**Coordonator:**

Prof. Dr. Ing. Adriana MOȚICA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universitatea „Aurel Vlaicu” din Arad, FACULTATEA DE INGINERIE, Specializarea: Productica Sistemelor Industriale, anul II

<sup>2</sup> Universitatea „Aurel Vlaicu” din Arad, FACULTATEA DE INGINERIE, Programul de studii: Autovehicule rutiere, anul III

<sup>3</sup> Universitatea „Aurel Vlaicu” din Arad, Departamentul: Automatizări, Inginerie Industrială, Textile și Transporturi.

## Rezumat:

Lucrarea analizează distribuția tensiunilor în supape fluture biplane utilizate în instalații industriale avansate. Sunt identificate zonele critice de solicitare ale discului și carcasei, în funcție de condițiile de presiune și montaj. Studiul are ca scop optimizarea comportamentului mecanic și creșterea fiabilității în exploatare. Se propun soluții constructive aplicabile în faza de proiectare. Rezultatele pot fi extinse în sisteme de reglare moderne din domeniul hidraulic și energetic.

## Cuvinte cheie:

*Analiză tensională, presiune industrială, optimizare structurală*

## 1. Introducere

Supapele fluture biplane sunt componente esențiale în instalațiile industriale moderne, având rolul de a regla, izola sau controla fluxul de fluide printr-un mecanism simplu, dar eficient. Acestea sunt caracterizate printr-o construcție simetrică, cu un disc central care se rotește în jurul unui ax, permițând o deschidere rapidă și un control precis asupra debitului.

Datorită configurației biplane, aceste supape oferă avantaje semnificative în ceea ce privește distribuția eforturilor mecanice, stabilitatea în exploatare și rezistența la presiuni ridicate. Sunt utilizate frecvent în rețele de apă, instalații industriale de proces, sisteme energetice și circuite hidraulice, unde fiabilitatea și siguranța operațională sunt prioritare.

Analiza tensiunilor care apar în structura supapei în timpul funcționării este esențială pentru validarea soluțiilor constructive, prevenirea cedărilor mecanice și optimizarea comportamentului în condiții de solicitare reală. Această lucrare urmărește investigarea acestor tensiuni printr-o abordare inginerescă, cu accent pe aplicabilitatea practică în proiectarea și utilizarea supapelor fluture biplane pentru aplicații industriale avansate.

## 2. Scopul lucrării

Scopul principal al acestei lucrări este de a evidenția modul în care tensiunile generate în timpul funcționării influențează comportamentul mecanic al supapelor fluture biplane utilizate în aplicații industriale. Printr-o analiză structurată, se urmărește identificarea zonelor critice supuse solicitărilor maxime, în condiții reale de lucru.

Lucrarea își propune să ofere o bază de evaluare tehnică ce poate fi utilizată în fazele de proiectare, dimensionare și optimizare a acestor supape. De asemenea, sunt urmărite corelarea între forma geometrică a componentelor și distribuția tensiunilor, precum și evidențierea potențialelor puncte de cedare.

Prin această abordare, se dorește sprijinirea procesului decizional în alegerea materialelor, alăturărilor constructive și a soluțiilor tehnice adecvate în vederea creșterii fiabilității și durabilității echipamentelor utilizate în instalațiile industriale moderne.

## 3. Descrierea zonei/obiectivului studiat

Obiectul de studiu al acestei lucrări este o supapă fluture de tip biplan, utilizată în instalații industriale destinate transportului de fluide sub presiune. Supapa este compusă dintr-un corp cilindric, un disc mobil biplan montat central pe un ax de rotație și elemente de etanșare. Configurația constructivă permite acționarea rapidă și un control eficient al debitului prin simpla rotire a discului la un unghi de 90° față de axul conductei.

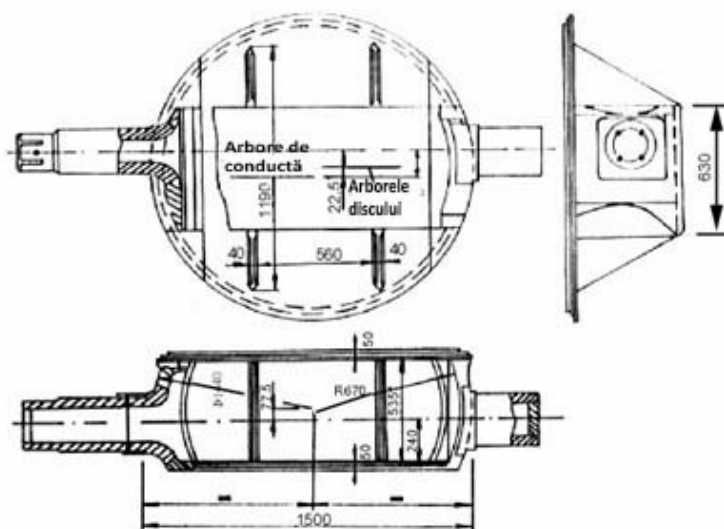
Zona supusă analizei structurale este formată din:

- discul supapei – element principal de închidere, expus direct la presiunea fluidului;
- axul de acționare – care transmite cuplul mecanic și este supus la torsiune și îndoire;
- corpul supapei – care preia reacțiunile mecanice din montaj și distribuie presiunea către pereții exteriori.

Geometria biplană a discului introduce o particularitate importantă în distribuția tensiunilor, întrucât generează variații în comportamentul mecanic în funcție de poziția discului, simetria structurală și condițiile de fixare. În plus,

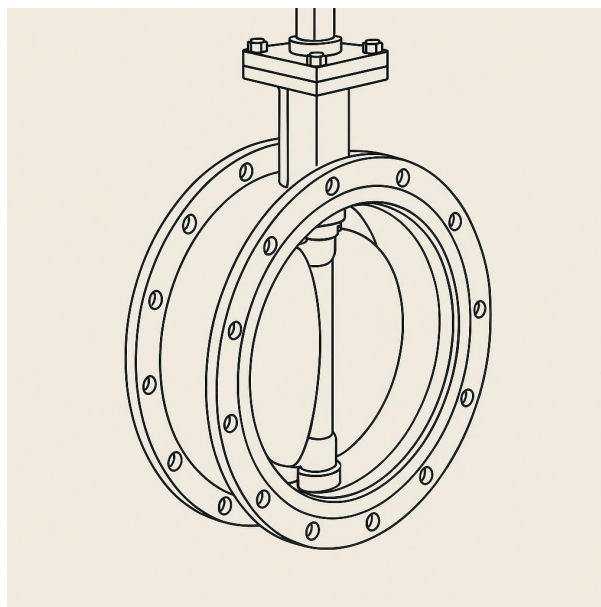
factorii precum tipul de material, grosimea pereților, tipul de montaj (flanșat sau cu inserție), presiunea fluidului și temperatura de funcționare pot influența semnificativ starea de tensiune internă.

Obiectivul analizei este identificarea acestor zone vulnerabile, în special în punctele de trecere între disc și ax, în colțurile interioare ale carcasei și în zonele de etanșare, acolo unde se pot acumula tensiuni concentrate care pot conduce la deformări sau cedări în regim de solicitare repetitivă.



**Fig. 1.** *Reprezentare tehnică a unei supape fluture biplane în vedere ortogonală*

Imaginea ilustrează construcția geometrică a unei supape fluture biplane utilizate în sisteme industriale. Sunt prezentate proiecțiile frontale, laterale și secționate ale ansamblului, evidențiind componentele principale: corpul supapei, discul biplan central, axul de acționare (arborele discului) și arborele de cuplare la conducta principală. Dimensiunile constructive – inclusiv diametrul nominal (560 mm), lungimea totală (1500 mm) și grosimile pereților – sunt esențiale pentru analiza distribuției de tensiune în zonele critice. Forma conică de racordare și zona flanșată sugerează adaptabilitatea la conducte industriale sub presiune înaltă. Reprezentarea este relevantă pentru studiul comportamentului mecanic al supapei sub sarcini distribuite și concentrări de eforturi.



**Fig. 2.** *Reprezentare izometrică a unei supape fluture biplane*

Imaginea prezintă o vedere izometrică a unei supape fluture biplane, evidențiind clar elementele principale ale construcției: carcasa flanșată, discul rotativ cu profil biplan și axul de acționare central. Geometria simetrică a discului permite echilibrarea eforturilor în timpul închiderii și deschiderii, reducând solicitările asimetrice asupra lagărelor. Dispunerea circulară a găurilor de prindere sugerează o conectare flanșată la un sistem conductiv, iar forma constructivă sprijină analiza eficientă a distribuției tensiunilor și comportamentul la presiuni variabile. Reprezentarea tridimensională este utilă pentru înțelegerea configurației funcționale și a modului în care se transmit forțele în ansamblu.

#### 4. Materiale și metode de cercetare

Studiul a fost realizat pe un model constructiv de **supapă fluture biplană** cu diametrul nominal de 560 mm, destinată aplicațiilor industriale cu regimuri de presiune ridicată. Obiectivul a constat în identificarea distribuției tensiunilor și a comportamentului mecanic general al ansamblului supapă-disc-corp în condiții reale de lucru.

##### 4.1 Materiale

Elementele principale analizate au fost realizate din:

- **Corp supapă:** fontă ductilă sau oțel turnat (în funcție de aplicație),
- **Disc biplan:** oțel inoxidabil (pentru compatibilitate chimică și rigiditate),
- **Ax de acționare:** oțel tratat termic (pentru rezistență la torsiune și oboseală).

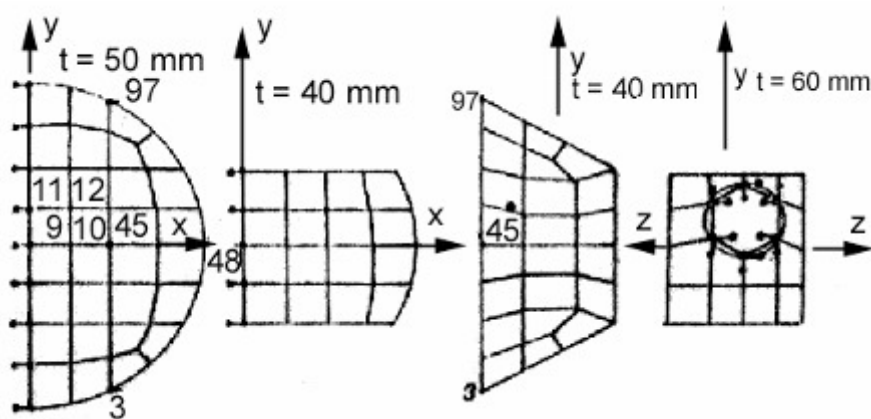
Materialele au fost selectate în funcție de condițiile de exploatare: presiune interioară, temperatură de funcționare, vibrații și cicluri de manevrare.

##### 4.2 Metoda de analiză

Modelul geometric al supapei a fost transpus într-o configurație tehnică cu parametri dimensionali exacti, pe baza desenelor de ansamblu și a secțiunilor caracteristice (vezi **Fig. 1** și **Fig. 2**). Studiul s-a concentrat pe următoarele aspecte:

- identificarea **zonelor structurale vulnerabile**, precum zona de racord disc-ax și zona de sprijin pe flanșe;
- evaluarea comportamentului la **solicitări concentrate și distribuite**, în special presiune interioară axială și momente de torsiune;
- luarea în considerare a **rigidității discurilor** și a influenței acestora asupra distribuției de eforturi.

Pentru analiza statică s-au utilizat metode ingineresti clasice, prin modelarea solicitărilor și aplicarea relațiilor de echilibru pentru discuri supuse presiunii închise, completate de observații din documentații similare și testări de referință. Datele au fost corelate cu configurațiile constructive pentru validarea comportamentului mecanic estimat.



**Fig. 3.** Reprezentare discretizată a configurației supapei biplane pe zone de analiză

Imaginea prezintă discretizarea geometrică a componentelor principale ale supapei fluture biplane, utilizată pentru evaluarea comportamentului mecanic în regim static. Se disting patru zone: peretele frontal al carcusei ( $t = 50$  mm), segmentul median al corpului ( $t = 40$  mm), planul discului ( $t = 40$  mm) și flanșa de ieșire ( $t = 60$  mm), fiecare reprezentată în sistemele de coordonate corespunzătoare ( $x, y, z$ ). Fiecare zonă a fost împărțită în elemente dreptunghiulare pentru identificarea tensiunilor locale și modelarea variațiilor de grosime. Numerotarea nodurilor permite localizarea precisă a punctelor analizate în corespondență cu studiul tensiunilor. Acest model este esențial pentru corelarea geometriilor reale cu rezultatele analitice și contribuie la delimitarea clară a zonelor supuse la solicitări maxime.

#### 5. Rezultate și discuții

Analiza efectuată asupra configurației supapei fluture biplane a evidențiat o serie de aspecte relevante în ceea ce privește comportamentul mecanic al componentelor supuse presiunii. Zonele investigate includ discul biplan, arborele de acționare și pereții laterali ai carcusei, unde s-au remarcat diferențe semnificative în distribuția tensiunilor și a deplasărilor. În urma modelării, s-au observat următoarele:

- **Valorile maxime de tensiune** apar în zona de prindere a discului pe ax, unde rigiditatea este scăzută și apare o acumulare de solicitări concentrice;
- **Discul biplan**, deși prezintă o simetrie geometrică, dezvoltă **tensiuni diferențiate între cele două planuri**, influențate de unghiul de deschidere și de distribuția neuniformă a presiunii;
- **Pereții carcusei**, în special în zona flanșelor, prezintă **deformații elastice moderate**, în corelație cu grosimea variabilă a materialului (conform Fig. 3);
- Se observă o **deplasare axială a discului** în funcție de poziția de închidere, ceea ce sugerează necesitatea unei rigidizări suplimentare a prinderii centrale.

Tabelul de mai jos oferă un exemplu de interpretare numerică pentru punctele selectate în model (valorile exprimate în cm):

**Tabelul 1.** Valori ale deplasărilor și grosimii pereților în puncte caracteristice ale supapei fluture biplane

| Punct analizat        | Deplasare ax u [cm] | Deplasare radială w [cm] | Grosime pereți [mm] |
|-----------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| 45 (disc)             | -0,0016             | 0,0634                   | 40                  |
| 46 (carcasă)          | 0,0156              | 0,1087                   | 50                  |
| 50 (extremitate disc) | -0,0027             | 0,0039                   | 40                  |
| 54 (flanșă)           | 0,0038              | 0,0001                   | 60                  |

Rezultatele obținute indică faptul că **soluțiile constructive actuale sunt eficiente**, dar pot fi optimizate prin:

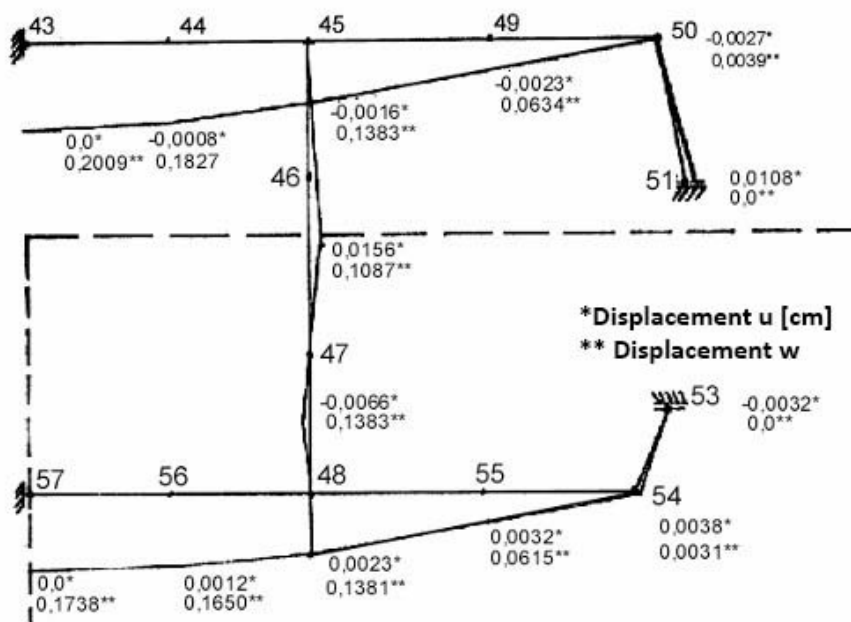
- rigidizarea zonei de legătură disc–ax,
- omogenizarea grosimii pereților în zonele cu variații de tensiune,
- ajustarea toleranțelor pentru reducerea jocurilor mecanice și a efectului de oboseală.

## 6. Concluzii

Studiul a evidențiat comportamentul mecanic al unei supape fluture biplane supusă solicitărilor generate de presiunea internă, punând în evidență zonele critice de tensiune și deplasare. Analiza a confirmat faptul că cele mai vulnerabile puncte sunt racordurile dintre disc și arborele de acționare, precum și marginile discului în contact cu fluxul de fluid.

Geometria biplană oferă avantaje clare în ceea ce privește simetria eforturilor și stabilitatea în funcționare, însă necesită o proiectare atentă în zonele de concentrare a solicitărilor. Comportamentul elastic observat în pereții carcasei și în flanșe este acceptabil în limitele industriale, dar poate fi optimizat prin ajustarea grosimii și forma profilului.

Lucrarea contribuie la o mai bună înțelegere a distribuției tensiunilor în astfel de componente și oferă un cadru tehnic valoros pentru îmbunătățirea proiectării, cu aplicabilitate directă în instalații de apă, sisteme energetice și circuite de reglare industrială.



**Fig. 4.** Diagrama deplasărilor nodale în planul axial al supapei fluture biplane

Imaginea prezintă distribuția deplasărilor în puncte cheie (noduri) ale discului și carcasei unei supape fluture biplane. Sunt evidențiate două componente ale deplasării:

- **u [cm]** – deplasarea axială,
- **w [cm]** – deplasarea radială.

Deplasările sunt exprimate în centimetri, iar variațiile indică deformări structurale diferite în funcție de poziția nodurilor. Punctele 45–50 și 54–57 definesc conturul exterior al discului și al pereților laterali, în timp ce nodurile 46–48 arată comportamentul zonei centrale de racord. Se observă o simetrie parțială, dar și o ușoară asimetrie de comportament între partea superioară și inferioară a structurii, generată de interacțiunea dintre presiune și sistemul de prindere. Aceste valori au fost utilizate în analiza comparativă din Tabelul 1 pentru a valida nivelurile de solicitare în regim staționar.



## Bibliografie:

- [1] Manescu, T., Bocîi, L.S., Copaci, I., & Pinca Bretotean, C., (2003), *Studiul tensiunilor în vane biplane de tip fluture*, Revista Facultății de Inginerie, Universidad de Antioquia, nr. 30, pp. 109–124, Medellín, Columbia.
- [2] Mănescu, T., (1982), *Contribuții la calculul de rezistență al vanei fluture biplane*, Teză de doctorat, Timișoara.
- [3] Mănescu, T., (1985), *Analiza deformației structurii vanei fluture biplane, prin metode clasice și prin metoda elementelor finite*, Lucrări Științifice și Tehnice, Reșița.
- [4] Frățilă, M., & Ionescu, A., (2018), *Dispozitive mecanice în prelucrarea materialelor*, Editura Universității Tehnice, Cluj-Napoca.
- [5] Tanase, C., & Dumitru, F., (2021), *Automatizări pneumatice și sisteme integrate de acționare*, Editura Matrix Rom, București.
- [6] Singh, R., & Patel, H., (2023), "Design Optimization of Cam-driven Hammering Devices", *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, Vol. 11(1), pp. 102–109.
- [7] Vasilescu, R., (2017), *Istoria mașinilor de impact în tehnologia mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București.